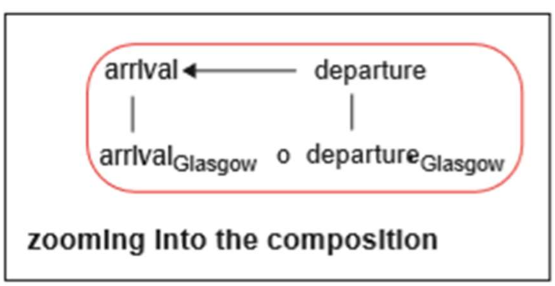
Prof. Dr. Alfred Toth

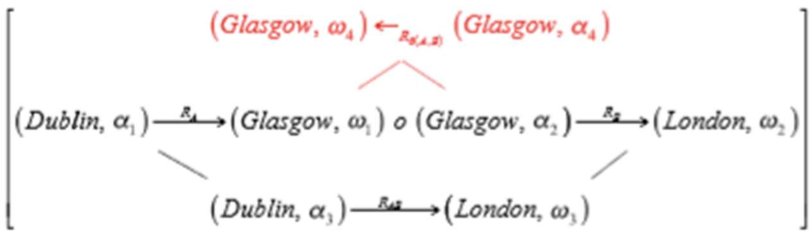
Der semiotische diamond

1. Eine der bedeutendsten theoretischen Neuerungen in der polykontexturalen Logik und der auf ihr basierenden qualitativen Mathematik stellt Rudolf Kaehrs Entdeckung des „diamond" dar (vgl. Kaehr 2007). Der diamond wird zunächst informell eingeführt: Wenn ich mit dem Zug von Dublin nach London fahre und in Glasgow umsteige, dann fungiert Glasgow sofort als Ankunftsort des ersten Teils der Reise als auch als Abfahrtsort des zweiten Teils. Kategorientheoretisch kann man also das Umsteigen als „Komposition" zweier Morphismen – des ersten und zweiten Teils der Reise – auffassen. Nach Kaehr (2007, S. 18 ff.) ist es nun so, daß die Komposition ein Gegenstück hat, und zwar eine Abbildung, welche in der Umkehrung der Abbildung zwischen Glasgow als Ankunfts- und Abfahrtsort besteht. Diese in der quantitativen Kategorientheorie nicht definierte Abbildung nennt Kaehr „Heteromorphismus":

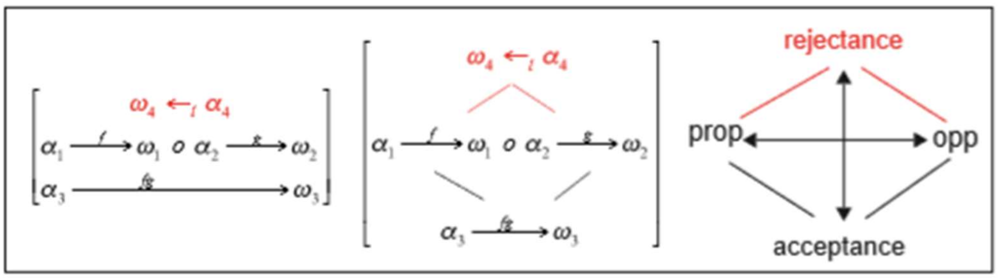
Bemerkenswert ist also, daß der Komposition des Hinwegs eine Abbildung des Herwegs korrespondiert, wobei diese Abbildung allerdings nicht eine Konversion der gesamten, komponierten, Abbildung, sondern nur der Komposition darstellt:



Nach Kaehr läßt sich die gesamte Hin- und Rückreise in der Form eines diamond formal wie folgt darstellen:



Die heteromorphe Abbildung korrespondiert also der homomorphen, konkatanierten, Abbildung:



2. Auffällig ist also, daß der kategorientheoretische diamond sich nicht mit den vier Möglichkeiten des Tetralemmas deckt, das bekanntlich wie folgt definiert ist:

X (affirmation)
$\neg X$ (negation)
$X \wedge \neg X$ (both)
$\neg(X \vee \neg X) \iff X \wedge \neg X \iff \emptyset$ (neither)

Das kategorientheoretische Modell des Tetralemmas sieht dann allerdings wie folgt aus:

$\text{Dublin}_1 \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow \text{London}_3$

$\text{Dublin}_1 \rightarrow \text{Glasgow}_1 \circ \text{Glasgow}_2 \rightarrow \text{London}_3$

$\text{Dublin}_1 \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow \text{London}_3$

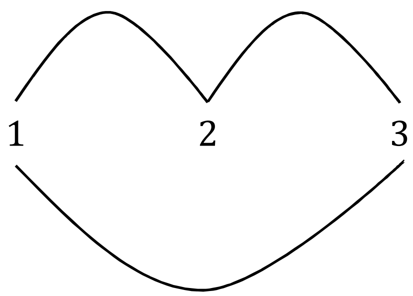
Hier gilt zwar ebenfalls (Glasgow$_1$) ≠ (Glasgow$_2$), aber der Umkehrung der komponierten Abbildung (Dublin$_1$) → (London$_3$) korrespondiert wieder eine komponierte Abbildung, und zwar diejenige der ganzen Reise und nicht nur der Umkehrung von Ankunft und Abfahrt am Umsteigebahnhof (Dublin$_1$) ← (London$_3$). Um als auch die letztere zu formalisieren und den Diamanten zu vervollständigen, müßte dieser wie folgt aussehen:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{Dublin}_1 & \multicolumn{5}{c}{\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-} & \text{London}_3 \\
 & & \text{Glasgow}_1 & \leftarrow & \text{Glasgow}_2 & & \\
\text{Dublin}_1 & \rightarrow & \text{Glasgow}_1 & \circ & \text{Glasgow}_2 & \rightarrow & \text{London}_3 \\
 & & \text{Glasgow}_1 & \rightarrow & \text{Glasgow}_2 & & \\
\text{Dublin}_1 & \multicolumn{5}{c}{-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow} & \text{London}_3
\end{array}
$$

Mittels Zahlen ausgedrückt haben wir also

$$
\begin{array}{ccccccc}
1_1 & \multicolumn{5}{c}{\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-} & 3_3 \\
 & & 2_1 & \leftarrow & 2_2 & & \\
1_1 & \rightarrow & 2_1 & \circ & 2_2 & \rightarrow & 3_3 \\
 & & 2_1 & \rightarrow & 2_2 & & \\
1_1 & \multicolumn{5}{c}{-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow} & 3_3
\end{array}
$$

Vgl. dazu die Darstellung mittels Abbildungszahlen (Toth 2019a, b) für n = 3.



(1 → 2 → 3)

(1 → 3)

Die Unterschiede zwischen der Darstellung mittels eines Diamanten und derjenigen mittels Abbildungszahlen sind also:

1. Die Abbildungszahlen werden zwar ohne Kompositionen dargestellt, aber sie lassen sich problemlos in Form von Kompositionen notieren:

1 → 2 ∘ 2 → 3

1 → 3

2. Abbildungszahlen sind zwar a priori nicht different für die Richtung der Abbildungen, aber sie lassen sich wiederum problemlos dazu ergänzen:

1 ← 2 ∘ 2 ← 3

1 ← 3,

d.h. wir haben dann

1 ← 3,

1 ← 2 ∘ 2 ← 3

1 → 2 ∘ 2 → 3

1 → 3.

3. Wie man anhand der letzten Darstellung sieht, sind allerdings die Morphismen bei den Abbildungszahlen immer vollständig, was die Domänen und die Codomänen betrifft, d.h. es gibt keine Abbildungen

$2_1 \quad \rightarrow \quad 2_2$

$2_1 \quad \leftarrow \quad 2_2$

mit

$2_1 \neq 2_2$.

Der Grund liegt darin, die beiden obigen Abbildungen für die rein quantitative Kategorientheorie nicht definiert sind, d.h. von deren Standpunkt aus liegen, um wieder das informelle Beispiel heranzuziehen, Glasgow als Ankunftsbahnhof und Glasgow als Abfahrtsbahnhof immer in derselben Kontextur – und damit auch sowohl auf der Hinfahrt als auch auf der Rückfahrt.

Tatsächlich ist nun gerade die nicht-quantitative Ungleichung ($2_1 \neq 2_2$) dafür verantwortlich, daß der Kaehrsche diamond im Gegensatz zum Tetralemma und im Gegensatz zu den Abbildungszahlen als qualitativ gedeutet wird. In der Polykontexturalitätstheorie wird ja jedem Subjekt eine 2-wertige Logik abgebildet, und diese n 2-wertigen Logiken werden durch Transperatoren zu einem „disseminierten" Verband. Ein solcher Transoperator liegt nun gerade in der konversen Abbildung ($2_1 \leftarrow 2_2$) vor, für die also gilt

$(2_1 \rightarrow 2_2) \neq (2_1 \leftarrow 2_2)$,

da die Zahl 2 sich in zwei verschiedenen Kontexturen K = 1 und K = 2 befindet, also einmal auf der Hinreise von Dublin nach London und einmal auf der Rückreise von London nach Dublin. (En potamoîs toîs autoîs embainomen kai ouk embainomen.)

Die Frage ist nur, wie hier eine Kontextur definiert wird. Wird sie für ein Objekt definiert, würde das bedeuten, daß der Bahnhof von Glasgow auf dem Hinweg ein anderer ist als auf dem Rückweg. Wird sie für ein Subjekt definiert, dann würde das implizieren, daß der Bahnhof von Glasgow für ein Subjekt X ein anderer ist als für ein Subjekt Y. Daraus würde allerdings folgen, daß auch die Komposition heteromorphismisch sein müßte, für den Fall, daß sowohl X als auch Y von Dublin via Glasgow nach London reisen.

Ein weiteres Problem stellt sich bei Namenabbildungen auf ein und dasselbe Objekt. Vgl. zur Illustration den folgenden Kartenausschnitt:

Hier wird die Grenze zwischen den Züricher Stadtquartieren Wipkingen (PLZ: 8037) und Höngg (PLZ: 8049) durch zwei Namenabbildungen der gleichen Straße markiert. Hier findet also ebenfalls eine morphismische Komposition der Form

$(1_1 \rightarrow 2_1 \circ 2_2 \rightarrow 3_3)$

statt, wobei je nach der Richtung der Abbildung

2_1 = Nordstraße / Ottenbergstraße

2_2 = Ottenbergstraße / Nordstraße

ist, denn die Nordstraße gehört politisch zu 8037 Zürich-Wipkingen, die Ottenbergstraße aber zu 8049 Zürich-Höngg. Dieser Fall liegt somit anders als derjenige des Bahnhofs von Glasgow, denn auf diesen ist ja ein und derselbe Name abgebildet.

Damit erhebt sich aufs Neue die Frage, auf welcher Basis Kontexturen eigentlich definiert werden. Im letzten Beispiel gehört die Grenze (G) zwischen den beiden Straßen nämlich zur Vereinigung der beiden Kontexturen, also

$G \subset (K = 1 \cup K = 2)$,

während im ersten Beispiel der Bahnhof von Glasgow einer und derselben Kontextur angehört, obwohl er von Kaehr als bikontextural eingeführt wird.

Offenbar sind bei Kaehr also die Kontexturen, wie es ja die polykontexturale Basistheorie verlangt, ausschließlich nach den Subjekten definiert. Daraus folgt dann aber, daß bei der „Kontexturengrenze“ im letzten Beispiel gar keine Grenze vorliegt, denn sie gilt ja unabhängig vom Subjekt und ist rein nach dem Ort und damit vermöge der Ortsfunktionalität ontischer Objekte $\Omega = f(\omega)$ nach dem Objekt definiert. Dieses ist in der polykontexturalen Logik allerdings im Gegensatz zum Objekt, das weiterhin im Sinne Hegels als „plattes, totes“ Objekt aufgefaßt wird, nicht-iterierbar. Wir stehen also vor einem Dilemma.

Literatur

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow 2007. Digitalisat: www.vordenker.de/rk/rk_Diamond-Theory_collection-of-papers-and-fragments_2007.pdf

Toth, Alfred, Abbildungszahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019a

Toth, Alfred, Nicht-eingebettete und eingebettete Abbildungszahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019b

24.8.2019